

パラメトリック曲線の道路線形への適用

AN APPLICATION OF PARAMETRIC CURVES TO HIGHWAY ALIGNMENT

蒔苗 耕司
Koji Makanae

【抄録】3次元自由曲線として用いられているパラメトリック曲線の道路線形への適用性について検討した。数種類のパラメトリック曲線による道路線形について、走行時における遠心加速度及びその変化率について比較した。その結果、高規格の道路線形に対しては3次B-スプライン曲線が、低規格の道路線形に対しては2次B-スプライン曲線が道路線形への適用性が高いことを示した。

【Abstract】The authors examined an application of parametric curves used as spatial curves to highway alignment. Both of centrifugal acceleration and its rate of increase while driving the highway alignment designed by several kinds of parametric curve were compared. As a result of the examination, it was shown that cubic B-spline curves are applicable to the case of high-grade of alignment design and quadratic B-spline curves are applicable to the case of low-grade of alignment design.

【キーワード】道路線形, パラメトリック曲線, B-spline 曲線, 遠心加速度, CAD

【Keywords】highway alignment, parametric curve, B-spline curve, centrifugal acceleration, CAD

1. はじめに

道路の線形設計は、一般的に平面線形と縦断線形に分離した2次元線形として設計が行なわれる。道路の設計に関する技術基準である道路構造令においても、それぞれの2次元線形に対する幾何構造の設計基準が示されるが、これらの設計基準に適合したとしても、最終的に合成して得られる3次元道路線形が理想的な線形である保証はない。

道路線形をあらかじめ3次元線形として設計することができれば、このような問題は生じない。それを実現する一つの手法として、空間自在定規による設計手法がある¹⁾。この手法は弾性材料を用いた自在定規を用いて、空間内で3次元線形として道路線形を設計する手法である。この手法では3次元線形の形状把握が容易であり、また平面線形と縦断線形の変曲点が一致することから両者の調和を図ることが可能である。しかし空間自在定規の情報を図化あるいは数値化する作業が容易ではない、また地形との整合を図ることができないなどの問題がある。

一方、機械工学分野を中心に、コンピュータ上での自在定規の再現手法としてパラメトリック曲線の研究が行なわれ、CAD上でその実用化が図られている²⁾。このパラメトリック曲線を用いれば、空間自在定規による道路線形の設計手法をコンピュータ上で再現できるが³⁾、その場合、パラメトリック曲線によ

り描かれる道路線形が自動車及び運転者の走行条件を満たすものであるかが問題となる。

そこで、本論文では3次元CADにおける自由曲線の一般的定義手法として用いられているパラメトリック曲線の道路線形への適用性について検討する。

2. パラメトリック曲線とその数学的表現

(1) 曲線のパラメトリック表現

コンピュータ上における図形表現においては、与えられた2点間を接続する直線がその基本要素となり、曲線表現は直線の連続として表現される。直線の端点となる曲線上の座標値を求めることが必要であり、その方法としてパラメトリック曲線が用いられる。

パラメトリック曲線上の座標値は1つのパラメータにより表現され、パラメータを t とすれば、2次元曲線上の座標は次式により表現される。

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1)$$

自由曲線の数値表現手法については、CAD上でその実用化が図られている。本研究では、CAD上において一般的に用いられている3次スプライン曲線、

Bézier 曲線，2 次及び 3 次 B-スプライン曲線を対象とする．これらのパラメトリック曲線は，空間内に設定した制御点に基づき生成される（図-1）．

(2)パラメトリック曲線の数学的表現

a)3 次スプライン曲線

自在定規を弾性棒として考えた場合，制御点間の曲線セグメントの形状は 3 次多項式で表現できると考えられている．空間内に定められた $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ， $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ， $P_4(x_4, y_4, z_4)$ の 4 点を境界条件として描く 3 次元の 3 次スプライン曲線上の座標値 (x, y, z) は式(2a)によって与えられる⁴⁾．

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 x_i B_i(t) = x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t) + x_4 B_4(t) \\ y = \sum_{i=1}^4 y_i B_i(t) = y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t) + y_4 B_4(t) \\ z = \sum_{i=1}^4 z_i B_i(t) = z_1 B_1(t) + z_2 B_2(t) + z_3 B_3(t) + z_4 B_4(t) \end{cases} \quad (2a)$$

ただし， t ($t_1 \leq t \leq t_2$) はパラメータであり， t_1, t_2 は始点と終点のパラメータ値である．また $B_i(t)$ は係数である．

b)Bézier 曲線

n 個の頂点をもつ多角形の頂点として与えられる制御点の位置ベクトル $P_i(k)(k=1, 2, \dots, n)$ に対し，その曲線は $n - 1$ 次の関数として表現される．ここで曲線上における任意の 1 点の位置ベクトル $R(t)$ とすれば，Bézier 曲線は式(3a)によって定義される．

$$R(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{n,i}(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3a)$$

基底関数 $B_{n,i}(t)$ は Bernstein 関数と呼ばれ，式(3b)により表される．

$$B_{n,i}(t) = \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3b)$$

c)B-スプライン曲線

$n + 1$ 個の制御点の位置ベクトル $P_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ により定義される曲線上の位置ベクトル $R(t)$ (t はパラメータ) は，式(4a)により表される．

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) P_i \quad (4a)$$

$(t_{min} \leq t \leq t_{max} \quad 2 \leq k \leq n+1)$

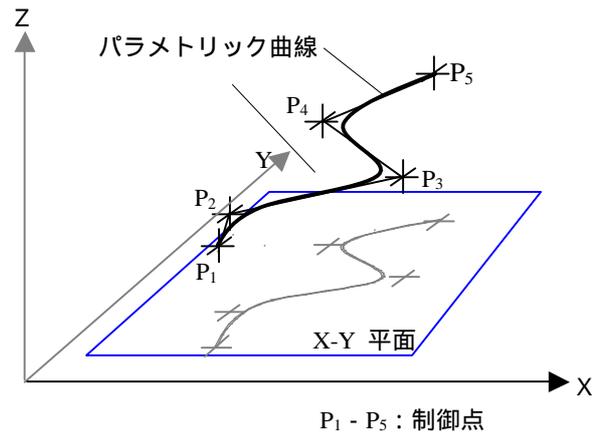


図-1 パラメトリック曲線

ここで， $N_{i,k}(t)$ は正規化された k 位 ($k - 1$ 次) の B-スプライン基底関数である．

基底関数 $N_{i,k}$ は，Cox-deBoor の帰納式により，式(4b)のように表現される．

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (4b)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} N_{i, k-1}(t) + \frac{x_{i+k} - t}{x_{i+k} - x_{i+1}} N_{i+1, k-1}(t)$$

ただし， x_i の値は， $x_i \leq x_{i+1}$ の関係を満たす数列要素 (ノット) のベクトル要素であり，求められるノット数は制御点数 n と位数 k との和となる．

3 . 道路線形への適用性評価

一般に，運転者は遠心加速度及びその変化率に敏感であり，その値が一定値を超えることにより運転者は不快感をもち，自動車の安定性を増すような操作を始めることが知られている⁵⁾．遠心加速度値を決定する曲率は，平面線形における円曲線の半径に規定されるから，設計上は相似的にその大きさを変えることにより対応できる．一方，曲率の変化は緩和曲線の有無及びその性能に依存する．

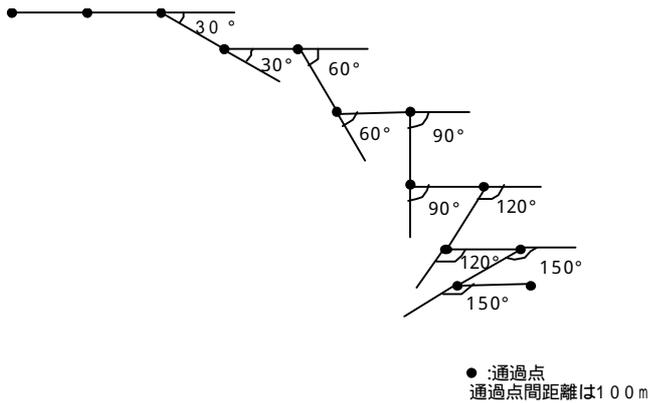


図-2 通過点の設定モデル(1)

一般に緩和曲線には、遠心加速度の変化率を一定としたクロソイド曲線が用いられ、直線と円曲線、あるいは円曲線同士を円滑に接続するようにしている。従って、パラメトリック曲線を道路線形に適用する場合の走行特性として、遠心加速度及びその変化率について評価が必要である。

ここでの走行特性評価においては、上述したように自動車の運転者は遠心加速度に対し敏感であり、また一般に道路線形設計においては、水平成分に関する評価値が与えられている。またパラメトリック曲線では、曲線上の x 座標、 y 座標、 z 座標は独立して求められるから、縦断成分も平面成分と同様の曲線性能を有する。従って曲線の性能評価を行うにあたっては、いずれかの成分について検証を行えばよく、ここではパラメトリック曲線の水平成分に対する評価を行う。

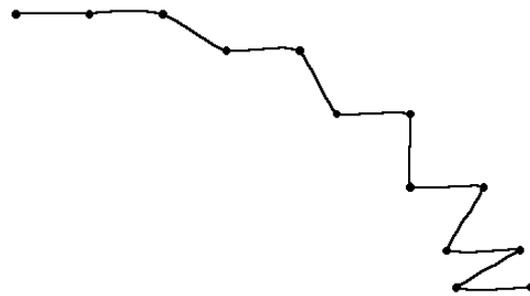
(1)道路の屈曲に対する加速度の変化

道路線形の屈曲の度合いとパラメトリック曲線の走行特性との関係について検討する。

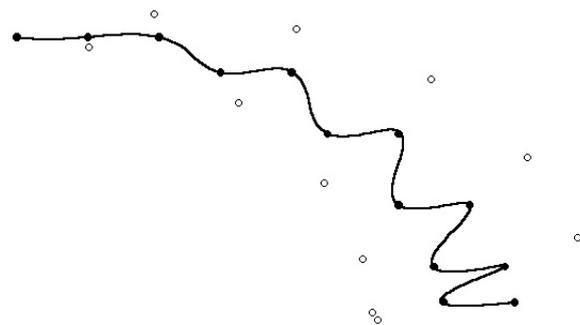
パラメトリック曲線の設定にあたって、その通過点を規則的に設定し、それを通過するように制御点を調整し、道路線形の設定を行うこととする。なお通過点は、隣合う通過点の距離を一定(数値計算上100mとして設定)とするとともに、その位置について図-2のように設定した。すなわち、この設定により、道路線形の屈曲の度合いによる走行性能の比較が可能となる。

制御点位置の決定にあたっては、曲線長が最小となるよう、通過点と曲線の頂点が一致するよう配慮しながら行なった。なお、3次スプライン曲線以外は、端点を除けば制御点は曲線上にないことから、それを通過するように制御点を操作することになる。得られた曲線は図-3の通りである。これらの曲線に

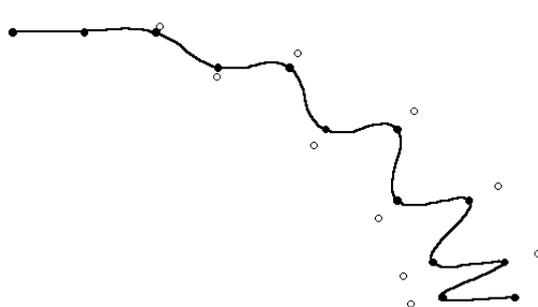
a)3次スプライン曲線



b)ベジエ曲線



c)2次B-スプライン曲線



d)3次B-スプライン曲線

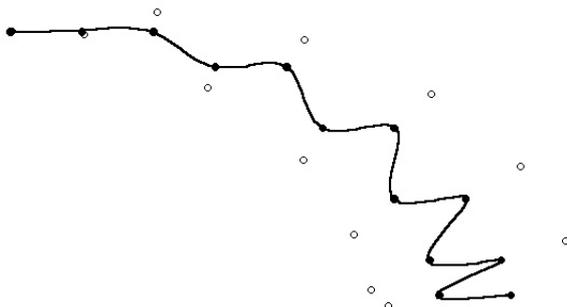


図-3 通過点に対するパラメトリック曲線(1)

: 通過点, 制御点, 通過点間距離は100m

関して、遠心加速度及びその変化率の評価を行う。

遠心加速度は、以下により求められる。

曲線部を走行する自動車及び運転者には、遠心力に伴う遠心加速度が働く。その値は円曲線の半径と走行速度によって求めることができる。すなわち、遠心加速度 $a(m/s^2)$ は、式(5)のように表される。

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5)$$

ただし、 v ：速度 (m/s)、 r ：曲線半径 (m)。

3次元線形はパラメトリック曲線として描かれた点列により構成され、曲線半径という定義をもたない。そこで、曲線半径を円運動における角加速度によって表現すれば、式(5)は、式(6)のようになる。

$$a = v \quad (6)$$

ただし、 ω ：角速度 (rad/s)。

パラメトリック曲線上の連続した3点を P_{n-2} 、 P_{n-1} 、 P_n とし、2つの直線 $P_{n-2} - P_{n-1}$ 、 $P_{n-1} - P_n$ の交角を求める。パラメトリック曲線の座標点列の間隔は一定ではないことから、その交角を自動車が $P_{n-1} - P_n$ を走行した時の轉向角 (rad)、その移動距離を d (m) とすれば、点 P_n における角速度は式(7)により求められる。

$$\omega = 2v \sin(\theta/2) / d \quad (7)$$

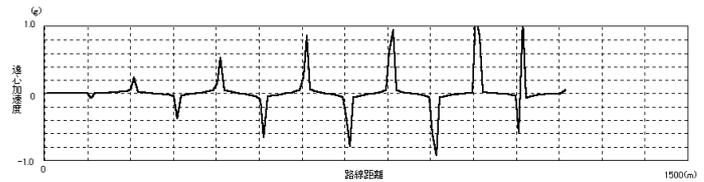
これにより、点 P_n における遠心加速度 a_n (m/s^2) は式(8)により求められる。

$$a_n = 2v^2 \sin(\theta/2) / d \quad (8)$$

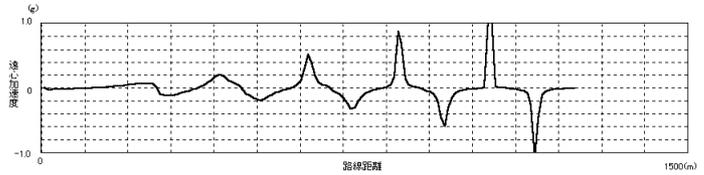
なお、ここでは設計速度を 30km/h とし、1秒あたりの走行距離に対する遠心加速度を求めている。

各パラメトリック曲線に対する加速度の変化を図-4に示す。3次スプライン曲線では、曲線の接続部において、その加速度が急激に変化しており、道路線形への適用は不相当であると考えられる。轉向角 150° に相当する区間では、すべての曲線において、大きな加速度を生じさせており、スプライン曲線及び B-スプライン曲線では正負方向に振動を生じており、これは曲線が局所的なねじれが生じているものによると考えられる。従って、轉向角が 120° を上回るような制御点の設定は避けるべきであると言える。

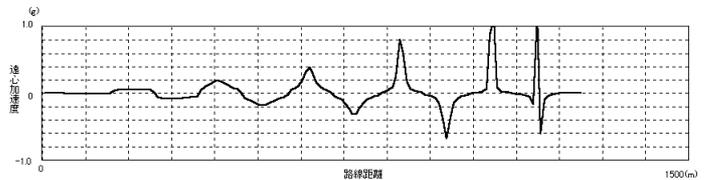
a) 3次スプライン曲線



b) ベジェ曲線



c) 2次 B-スプライン曲線



d) 3次 B-スプライン曲線

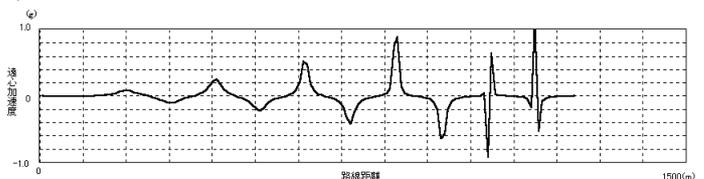


図-4 角度の変化による加速度の変化

轉向角 0° から 120° に相当する区間において、加速度の大きさを比較すると、2次-Bスプライン曲線が最小値を示している。一方、加速度の変化が滑らか、かつ変曲点付近での加速度変化が対称性を有するのは、3次-Bスプライン曲線である。

(2) 通過点間距離の比率による加速度の変化

(1) においては、通過点間の距離を一定とした場合の評価を行なったが、実際に3次元設計を行なう場合には、必ずしもそれは一定とは限らない。そこで、さらに道路線形の屈曲と通過点間の距離の比率を変えた場合、すなわち非対称の通過点を与えられた場合のパラメトリック曲線の特性について評価を行う。

ここでは、隣合う通過点間隔を 100m : 100m、100m : 200m、100m : 300m とし、図-5のように設定する。また轉向角については、 120° を上限とし 30° 毎にその評価を行うこととした。設定した通過点に対する曲線の一例を図-6に示す。ただし、この例の

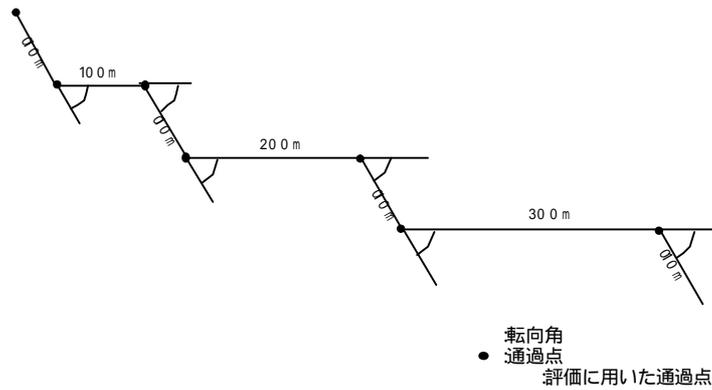


図-5 通過点の設定モデル(2)

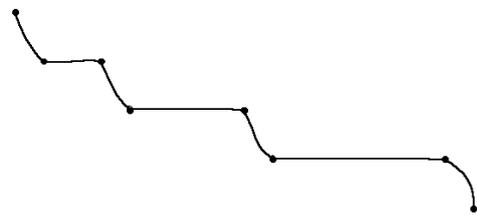
転向角は 60° である。

図-5 の , , の通過点前後の背向部を含めた屈曲区間における走行速度 30 km/h の場合の遠心加速度及び加速度変化率の最大値(絶対値の最大値)は表-1, 表-2 の通りで, 次のことが分かる。

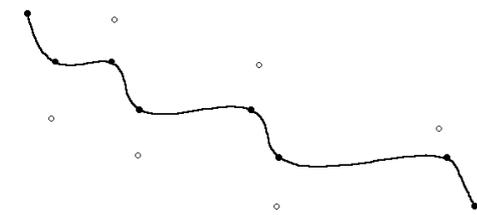
- 1) 3 次スプライン曲線については, 殆どの区間において遠心加速度及び遠心加速度変化率は最大値を示している。
- 2) 転向角 30° の場合について, 遠心加速度最大値が最小値を示すのは, $100\text{m}:100\text{m}$ 及び $100\text{m}:200\text{m}$ では 2 次 B-スプライン曲線及び Bézier 曲線が, また $100\text{m}:300\text{m}$ では 3 次 B-スプライン曲線が最小値を示す。
- 3) 転向角 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ の場合について, 遠心加速度最大値が最小値を示すのは, $100\text{m}:100\text{m}, 100\text{m}:200\text{m}$ では 2 次 B-スプライン曲線, 次いで Bézier 曲線, 3 次 B-スプラインの順となる。また, $100\text{m}:300\text{m}$ では 3 次 B-スプライン曲線が最小値を示しており, 次いで 2 次 B-スプライン, Bézier 曲線の順になる。
- 4) 遠心加速度変化率の最大値についてみれば, 転向角 60° で $100\text{m}:100\text{m}$ の場合に Bézier 曲線が, $100\text{m}:200\text{m}$ の場合に 3 次 B-スプライン曲線が最小値を示す。それ以外には全て 2 次 B-スプライン曲線が最小値を示しており, 次いで Bézier 曲線, 3 次スプライン曲線の順となる。
- 5) $100\text{m}:300\text{m}$ の場合については, すべてのケースにおいて 3 次 B-スプライン曲線が最小値を示し, 次いで 2 次 B-スプライン曲線, 3 次 B-スプライン曲線の順となる。

表-1, 表-2 は, 次の 2 つの領域に分けられる。すなわち, 転向角 30° 及び $100\text{m}:300\text{m}$ の区間と, 転向角 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ の場合の $100\text{m}:100\text{m}, 100\text{m}:200\text{m}$ の区間である。ここで前者を A 領域(表-1, 表-2 太線に囲まれた部分, 高規格領域), 後者を B 領域(表-1,

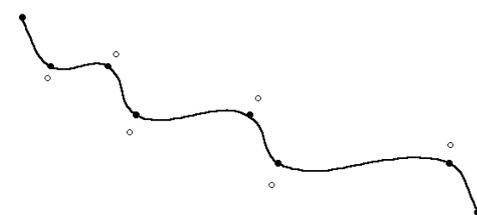
a) 3 次スプライン曲線



b) Bézier 曲線



c) 2 次 B-スプライン曲線



d) 3 次 B-スプライン曲線

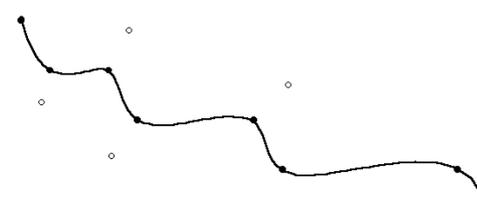


図-6 転向角 60° の場合のパラメトリック曲線

表-2 破線に囲まれた部分（低規格領域）と呼ぶことにする。

A 領域においては、遠心加速度についてみれば、転向角 30°、100m:100m、100m:200m の場合には、2 次 B-スプライン曲線、Bézier 曲線が小さな値を示すが、それを除けば 3 次 B-スプライン曲線が最も小さな値を示す。また遠心加速度変化率については、3 次 B-スプライン曲線が最も小さな値を示す。

すなわち、高規格の道路線形には高い緩和性能が求められ、遠心加速度の変化率が小さいものが要求される。この点において、3 次 B-スプライン曲線は、この領域においては最も適合した線形であるといえることができる。

B 領域は転向角が大きく、また制御点間距離比率が小さな区間である。この区間において、2 次 B-スプライン曲線は遠心加速度及びその変化率において、ほとんどの場合において最小値を示し、次いで Bézier 曲線、3 次 B-スプライン曲線である。すなわち、2 次 B-スプライン曲線がこの領域に最も適合した線形であるといえることができる。

これらの評価結果をもとにすれば、次の通りまとめることができる。

転向角が 60°を下回る場合、すなわち屈曲の小さな道路において緩和性能が高いのは、3 次 B-スプライン曲線であり、またそれ以上の場合、すなわち屈曲の大きな道路においては、2 次 B-スプライン曲線が加速度及びその変化が小さな道路線形を描くことが可能である。また Bézier 曲線は両者の中間的な特性を有している。3 次 B-スプライン曲線の道路線形への適用は不相当であると考えられる。

一方、3 次元道路線形としてパラメトリック曲線としての適用を考えた場合、縦断曲線としての適合性評価が必要となるが、パラメトリック曲線上の X 座標、Y 座標、Z 座標はそれぞれ独立して求められることから、縦断線形も平面線形と同様の曲線性能を有している。従って、表-2 における低転向角(30°)の場合の遠心加速度変化率から判断すれば、2 次あるいは 3 次 B-spline 曲線の適用が有効であると考えられる。なお、縦断曲線の場合には視距による制約があるが、これについてはパラメトリック曲線の制御点の設定位置の問題として、設計システム上で評価すれば良い⁶⁾。

これらのことから、2 次及び 3 次 B-スプライン曲線の適用が道路線形への適用性が高いと評価される。

4. パラメトリック曲線の応用性

現行の設計基準は、曲線部では運転者に対して働く遠心加速度及びその変化率を根拠として規定され

表-1 遠心加速度の最大値

転向角	曲線種別	遠心加速度最大値(絶対値)(g)			
		100m : 100m	100m : 100m	200m : 100m	300m : 300m
30°	3次スプライン	0.32	0.23	0.15	0.15
	Bezier	0.10	0.08	0.11	0.11
	2次B-スプライン	0.07	0.08	0.10	0.10
	3次B-スプライン	0.12	0.09	0.08	0.08
60°	3次スプライン	0.64	0.65	0.24	0.24
	Bezier	0.23	0.16	0.24	0.24
	2次B-スプライン	0.19	0.14	0.15	0.15
	3次B-スプライン	0.33	0.21	0.09	0.09
90°	3次スプライン	0.65	1.0	0.42	0.42
	Bezier	0.51	0.3	0.39	0.39
	2次B-スプライン	0.37	0.28	0.24	0.24
	3次B-スプライン	0.56	0.44	0.17	0.17
120°	3次スプライン	1.16	1.0	0.7	0.7
	Bezier	0.99	0.68	0.74	0.74
	2次B-スプライン	0.79	0.62	0.5	0.5
	3次B-スプライン	1.02	0.81	0.38	0.38

太線枠 A 領域,破線枠 B 領域,網掛けはカテゴリ内の最小値

表-2 遠心加速度変化率の最大値

転向角	曲線種別	遠心加速度変化率最大値(絶対値)(%/s)			
		100m : 100m	100m : 100m	200m : 100m	300m : 300m
30°	3次スプライン	1.98	1.64	1.2	1.2
	Bezier	1.22	1.04	1.04	1.04
	2次B-スプライン	1.07	0.99	0.67	0.67
	3次B-スプライン	1.22	0.23	0.04	0.04
60°	3次スプライン	5.78	6.18	1.72	1.72
	Bezier	0.60	1.20	1.90	1.90
	2次B-スプライン	0.77	1.2	0.85	0.85
	3次B-スプライン	1.27	0.58	0.09	0.09
90°	3次スプライン	5.94	8.92	2.88	2.88
	Bezier	2.05	0.82	2.22	2.22
	2次B-スプライン	1.23	0.6	0.95	0.95
	3次B-スプライン	3.10	1.59	0.31	0.31
120°	3次スプライン	15.27	13.12	6.82	6.82
	Bezier	6.18	4.16	3.92	3.92
	2次B-スプライン	3.66	2.95	1.94	1.94
	3次B-スプライン	7.72	5.2	1.35	1.35

太線枠 A 領域,破線枠 B 領域,網掛けはカテゴリ内の最小値

ており、また縦断線形については縦断勾配や視距等により規定される。従って、設計システム上においては、任意に設定されたパラメトリック曲線に対し、これらの計算値を得ることにより、道路線形としての適合性評価を行ないながら設計を進めていくことになる。その評価結果に問題があると判断される箇所については、道路線形に適合するように曲線の制御点を移動させていけばよい。また 3 次元道路線形は図面に依存したのではなく、任意の視点位置、投影方法による描画が可能である。また地形情報とリンクすれば同時に土工量についても計算可能となるであろう。すなわち、これまでの線形設計プロセスのようにあらかじめ設計基準に適合した線形要素を組み合わせるのではなく、コンピュータ上でその評価を行ないながら、設計を進めていく評価から設計へのフィードバックシステムが確立される。

図-7 に従来の線形設計プロセスと 3 次元道路線形を用いた線形設計プロセスを示す。

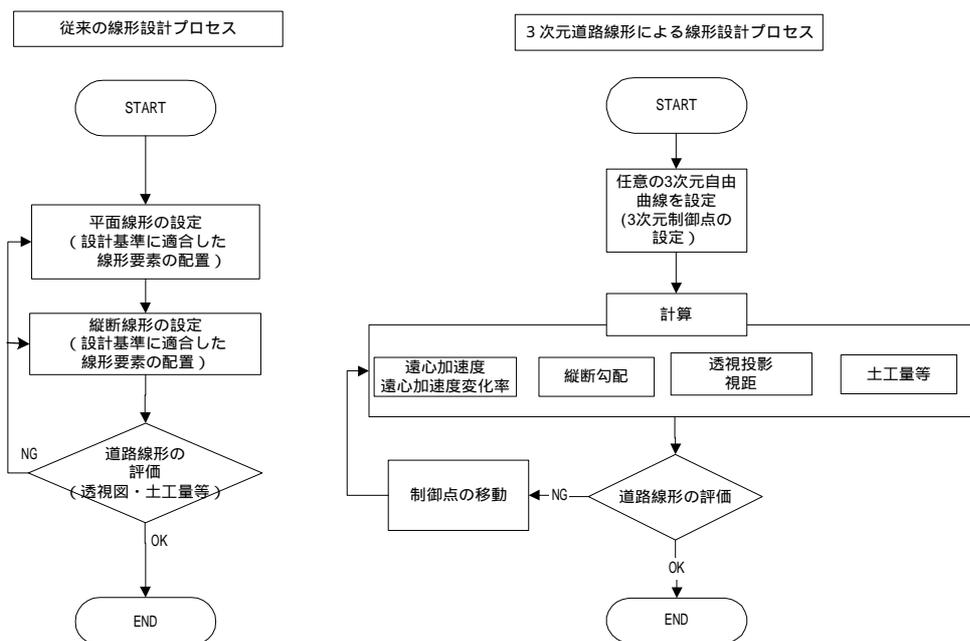


図-7 線形設計プロセスの比較

図-8は、著者が開発した3次元路線計画システム³⁾上での3次元道路線形(2次B-スプライン曲線を使用)に対する遠心加速度・遠心加速度変化率の評価例である。ここで対象道路の設計速度を40km/hであり、遠心加速度の許容値は0.15g、遠心加速度の変化率の許容値は0.75m/s²である⁵⁾。システム上では、仮設定した道路線形に対し、設計速度に対する遠心加速度、縦断勾配、合成加速度をリアルタイムで表示することができる。当初、仮設定した道路線形(図-8(a))では、これらの許容値を上回る区間が2区間、それに近い値を示す区間が2区間となっている。そこで、問題となる区間の制御点を微修正し、最終的に図-8(b)に示すように設計速度に対する許容値を下回る道路線形を得ている。

5. むすび

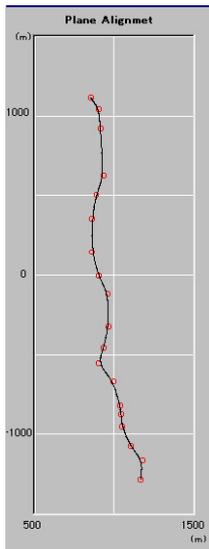
本研究では、パラメトリック曲線の道路線形への適用性について、3次元スプライン曲線、Bézier曲線、

B-スプライン曲線を対象として走行特性の評価を行なった。その結果、遠心加速度及びその変化率からみた走行特性の評価により、屈曲の小さな道路線形に対しては3次元B-スプライン曲線の適用性が高く、また屈曲の大きな線形に対しては2次元B-スプライン曲線の適用性が高いことを示した。

パラメトリック曲線は、コンピュータ上において容易に3次元の自由曲線の描画を実現するものであり、その道路線形への適用が可能となれば、コンピュータを利用したより高度な設計手法の確立が期待される。自由曲線の定義手法としてのパラメトリック曲線については、現在も多くの研究が進められている。

今後は、本研究で有用性が高いと示されたB-スプライン曲線を含め、より道路線形への適用性が高いと考えられる3次元線形の定義手法を導き出し、その実用性についての評価が必要であろう。

(a)修正前
(平面線形)

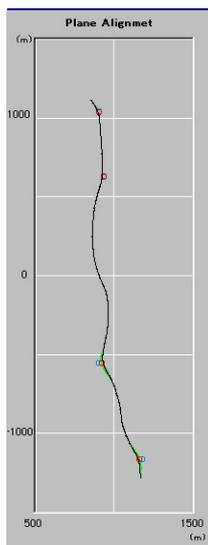


は制御点

(評価)



(b)修正後
(平面線形)



が修正した制御点

(評価)



図-8 パラメトリック曲線による3次元道路線形の評価例

参考文献

- 1) Lorenz, H. : TRASSIERUNG UND GESTALTUNG VON STRASSEN UND AUTOBAHNEN, Orion, Bauverlag GmbH, 1971. (中村英夫・中村良夫編訳：道路の線形と環境設計，鹿島出版会，1976)
- 2) 日経 CG 編著：CAD の基礎知識，日経 BP 社,1994 .
- 3) 蒔苗耕司・福田 正：CG と航空写真を用いた3次元路線計画システム，土木学会論文集，No.590/IV-39,

pp.23-30，1998 .

- 4) Rogers, D.F. and Adams, J.A. : コンピュータグラフィックス第2版，川合 慧監訳，凸版出版社，1993.
- 5) 社団法人日本道路協会：道路構造令の解説と運用，日本道路協会，1983 .
- 6) Koji Makanae : THREE-DIMENSIONAL DRAWING MODULE FOR HIGHWAY SIMULATION ,Journal of Civil Engineering Information Processing System in 1998 , pp211-216 .