一般選抜（後期日程）「数学」
（事業構想学群、食産業学群）

第１問 (必答問題) 次の問 1〜問 5 に答えよ。

解答

問 1 $-5x+12 \leqq 3x+5, \quad 7 \leqq 8x, \quad \therefore\ \dfrac{7}{8} \leqq x \quad \cdots①$

$|-x+1| < \dfrac{1}{7}, \quad -\dfrac{1}{7} < -x+1 < \dfrac{1}{7}, \quad -\dfrac{1}{7} < x-1 < \dfrac{1}{7}, \quad \therefore\ \dfrac{6}{7} < x < \dfrac{8}{7} \quad \cdots②$

ここで，$\dfrac{6}{7} < \dfrac{7}{8} < \dfrac{8}{7}$ に注意すれば，①, ② より，この連立不等式の解は，$\dfrac{7}{8} \leqq x < \dfrac{8}{7}$

問 2 $t=2^x$ とおくと，この不等式は $t^2+5t-6 \leqq 0$,
これを解くと，$(t+6)(t-1) \leqq 0, \quad -6 \leqq t \leqq 1$ を得る。

ここで，$t=2^x>0$ に注意すれば，この t に関する不等式の解は，$0<t \leqq 1$ である。
これは，x に関して，$0<2^x \leqq 2^0$ であるので，問題の不等式の解は $x \leqq 0$

問 3 $\log_9 64 = \dfrac{\log_3 2^6}{\log_3 3^2} = \dfrac{6\log_3 2}{2} = 3\log_3 2 = \log_3 8$，よって，$3^{\log_9 64} = 3^{\log_3 8} = 8$

問 4

$$\begin{aligned}\cos\frac{19\pi}{12} &= \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \left(= \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}\right)\end{aligned}$$

問 5 $x^2+y^2+ax-by+1 = \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + 1 = 0$ より，与式は

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1$$

この半径が 1 であるから，

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1 = 1, \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2, \qquad a^2+b^2=8$$

よって，a, b の満たすべき条件は，
$$a^2+b^2=8$$

第 2 問　(必答問題)

解答

(1) $y=x(x-2a)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$ より，軸の方程式は，　$x=a$

(2) (1) より，$f(x)$ の最小値は，　$-a^2$

(3) 連立方程式 $\begin{cases} y=x(x-2a) \\ y=ax \end{cases}$ を解いて，

$$\begin{aligned} &x^2-2ax=ax, \qquad x^2-3ax=0 \\ &x(x-3a)=0, \qquad \therefore \quad x=0,3a \end{aligned}$$

よって，交点は $(0,0)$，$(3a,3a^2)$ で，求める点 P は，　$\mathrm{P}(3a,3a^2)$

(4) 求める面積 S_1 は，

$$S_1=\int_0^a (g(x)-f(x))\,dx=\int_0^a (3ax-x^2)\,dx=\left[\frac{3a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{3a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{7a^3}{6}$$

(5) 求める面積 S_2 は，

$$\begin{aligned} S_2&=\int_a^{3a}(g(x)-f(x))\,dx=\left[\frac{3a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{3a} \\ &=\frac{27a^3}{2}-\frac{27a^3}{3}-\left(\frac{3a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{27a^3}{6}-\frac{7a^3}{6}=\frac{10a^3}{3} \end{aligned}$$

(6) 求める面積 S_3 は，

$$S_3=\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx=\int_{2a}^{3a}(x^2-2ax)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2\right]_{2a}^{3a}=0-\left(-\frac{4}{3}a^3\right)=\frac{4}{3}a^3$$

第 3 問　(必答問題)

解答

(1) 証明　d が奇数のとき，$d+1$ は偶数であるので，$(d+1)(d+2)$ は 2 で割り切れる。
d が偶数のとき，$d+2$ も偶数であるので，$(d+1)(d+2)$ は 2 で割り切れる。
自然数 d は奇数または偶数であるので，以上の議論により

「任意の自然数 d に対して，$(d+1)(d+2)$ は 2 で割り切れる」$\cdots$①

が証明された。

(2) 証明　まず，

「任意の自然数 d に対して，$(d+1)(d+2)(2d+3)$ が 3 で割り切れる。」$\cdots$②

を証明する。

任意の自然数 d はある自然数 k を用いて $3k-2,\ 3k-1,\ 3k$ のいずれかとして表されるので，それぞれ個別に考える。

(i) $d=3k-2$ と表されるとき，$d+2=(3k-2)+2=3k$ であるので，$(d+1)(d+2)(2d+3)$ が 3 で割り切れる。

(ii) $d=3k-1$ と表されるとき，$d+1=(3k-1)+1=3k$ であるので，$(d+1)(d+2)(2d+3)$ が 3 で割り切れる。

(iii) $d=3k$ と表されるとき，$2d+3=2\cdot3k+3=3(2k+1)$ であるので，$(d+1)(d+2)(2d+3)$ が 3 で割り切れる。

以上より，② が示された。(1) で示した ① と ② より，任意の自然数 d に対して，$(d+1)(d+2)(2d+3)$ は 6 で割り切れる。

第 **4** 問～第 **6** 問から，**2** 問を選択し，解答しなさい。

第 4 問　(選択問題)

解答

(1) $a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0$

(2) (1) から数列 $\{a_n\}$ は周期 4 で規則的な値を持つ。
今，$2025 = 506 \times 4 + 1$ であり，$a_{2025} = 0$ は (1) の規則性から分かるので，

$$\sum_{k=1}^{2025} a_k = \sum_{k=1}^{506}(a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}) + a_{2025} = \sum_{k=1}^{506} 0 + a_{2025} = 0 + a_{2025} = 0$$

(3) $n \geqq 2$ のとき，$b_n = a_{n-1}$ であるので

$$b_n = a_{n-1} = \cos\frac{(n-1)\pi}{2} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2}$$

これは，$n = 1$ のときも，$b_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ と与えられた条件を満たすので，
$n \geqq 1$ に対して，$b_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ である。以上より，

$$a_n{}^2 + b_n{}^2 = \cos^2\frac{n\pi}{2} + \sin^2\frac{n\pi}{2} = 1$$

である。

(4) (3) より，$b_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ であるので，加法定理より

$$a_m a_n - b_m b_n = \cos\frac{m\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{(m+n)\pi}{2}$$

第 **4** 問〜第 **6** 問から，**2** 問を選択し，解答しなさい。

第 5 問 (選択問題)

解答 $\begin{cases} \vec{a} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ \vec{b} = 5\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \end{cases}$ より，$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\vec{a} - \vec{b} \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\dfrac{5}{2}\vec{a} + \dfrac{3}{2}\vec{b} \end{cases}$ を得る。

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角を θ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta$ となる。

(1) $\theta = 0$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta = 1$ である。

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4-4+1 = 1$$

故に，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = (2\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \left(-5\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(-5\vec{a}+3\vec{b}\right) = 25|\vec{a}|^2 - 30\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 34 - 15\sqrt{3}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 7\vec{a} - 4\vec{b}$ であるので，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) \\ &= \left(7\vec{a}-4\vec{b}\right)\cdot\left(7\vec{a}-4\vec{b}\right) = 49|\vec{a}|^2 - 56\vec{a}\cdot\vec{b} + 16|\vec{b}|^2 = 65 - 56\cos\theta \end{aligned}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = 65 - 56\cos\theta \quad \cdots①$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ である。
故に，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = 37$，したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \sqrt{37}$

(4) (3) の ① と $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，

最大値 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = 121$ $\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 11$ ($\cos\theta = -1$ のとき)
最小値 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = 9$ $\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 3$ ($\cos\theta = 1$ のとき)

第 **4** 問〜第 **6** 問から，**2** 問を選択し，解答しなさい。

第 6 問　(選択問題)

解答

(1) X は二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うので，その期待値と標準偏差は，

$$m = 100 \times 0.2 = 20, \qquad \sigma = \sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8} = 4$$

(2) $X = 9$ より，$Z = \dfrac{9 - 20}{4} = -2.75$ である。

(3) 正規分布表より，この仮説に対する有意水準 0.5% の棄却域は，$P(0 \leqq Z \leqq 2.58) = 0.4950$ と正規分布の対称性より，

$$Z \leqq -2.58$$

である。

(4) (2) より，$Z = -2.75$ であり，この値は (3) で求めた棄却域に入るから，仮説は棄却できる。すなわち，改良によって不良率が下がったと判断してよい。