

第 1 問 （必答問題） 次の問 1～問 5 に答えよ。

解答 問 1 平均値は 45(点)，中央値は 41(点)

問 2 与式の判別式を D として， $\frac{D}{4} = (k-20)(k-23) = 0$ より， $k = 20, 23$ である。

問 3 $a + b = 2\sqrt{7}$ ， $ab = 7 - 25 = -18$ より，

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{(ab)^2} = \frac{(2\sqrt{7})^2 - 2 \times (-18)}{(-18)^2} = \frac{4 \times 7 + 4 \times 9}{2^2 \times 9^2} = \frac{16}{81}$$

問 4 接点の x 座標を a とすると， $y' = 3x^2 - 4 = -1$ より， $a = -1, 1$ である。

それぞれの場合の y の値より，接点は $(-1, 4)$ と $(1, -2)$ である。

よって，求める接線は， $y = -x + 3$ と， $y = -x - 1$ である。

問 5 単純計算により，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x + x^2 - x^3) dx &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

第2問 (必答問題)

解答 (1) $99x = 10a + b$ 故に, $\boxed{\text{ア}}$ には 10, $\boxed{\text{イ}}$ には 1 が入る。

(2) 整数 a, b は $9 \geq a > b > 0$ を満たす 1 桁の自然数であり, 特に, $a \neq 0$ であるので, $99x = 10a + b$ は 2 桁の自然数である。

(3) 関係式 (*) より, $x = 3y$ である。

整数 a, b, c, d , の条件 $9 \geq a > b > c > d \geq 0$ を考慮すると,

- $(c, d) = (2, 1)$ のとき, $(a, b) = (6, 3)$ であり, $x = 0.6363\cdots$, $y = 0.2121\cdots$ となる。
- $(c, d) = (3, 1)$ のとき, $(a, b) = (9, 3)$ であるが, これは $b > c$ を満たさないので不適。
- $c \geq 4$ のとき, $a \geq 12$ となり不適。
- $(c, d) = (3, 2)$ のとき, $(a, b) = (9, 6)$ であり, $x = 0.9696\cdots$, $y = 0.3232\cdots$ となる。
- $d \geq 3$ のとき, $a \geq 10 > b = 9$ となり不適。

以上より, 求める組は

$$(a, b, c, d) = (6, 3, 2, 1), (9, 6, 3, 2)$$

の 2 組である。

第3問 (必答問題)

解答 (1) 加法定理 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ より,

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

加法定理 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ より, 上と同様にして次を得る。

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

(2) (1) で得た式と加法定理より,

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1)$$

(3) (1) で得た式より,

$$\sin 4\theta = 8 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta = 4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$$

(4) (2) と (3) より,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 4 \cos^2 \theta - 1 = 4t^2 - 1 \\ b &= \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 4 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = 4t(2t^2 - 1) = 8t^3 - 4t \end{aligned}$$

(5) $\frac{4}{7}\pi = \pi - \frac{3}{7}\pi$ であるから, $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ より,

$$\sin \frac{4}{7}\pi = \sin \left(\pi - \frac{3}{7}\pi \right) = \sin \frac{3}{7}\pi$$

(6) $\theta = \frac{\pi}{7}$ として, (4) と (5) から $a = b$, 故に, t が満たす 1 つの 3 次方程式として,

$$8t^3 - 4t^2 - 4t + 1 = 0$$

第 4 問～第 6 問は、いずれか 1 問を選択し、解答しなさい。

第 4 問 (選択問題)

解答 (1) 1, 3, 5 の目が出たとき A が勝利するので、その確率は $\frac{1}{2}$ である。

(2) A が勝利する目の出る順は次の 15 通りであるので、求める確率は $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ である。

(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5).

(3) 題意を満たす目の出る順は次の 12 通りであるので、求める確率は $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ である。

(1, 1), (1, 3), (1, 5),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5).

(4) B が勝利する目の出る順は次の 18 通りであるので、求める確率は $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ である。

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5),
(3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5),
(5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5).

(5) 題意を満たす目の出る順は次の 6 通りであるので、求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ である。

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6).

第 4 問～第 6 問は、いずれか 1 問を選択し、解答しなさい。

第 5 問 (選択問題)

解答 正六角形の対称性を用いて次のように計算する。

$$(1) \quad \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (-\vec{b}) + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{BA} = (-\vec{a}) + (\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{a}) = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{CF} = -2\vec{a} \text{ であるから,}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \vec{a} + (-\overrightarrow{IH}) + (-2\vec{a}) = -\vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} - 2\vec{a} = \overrightarrow{CD}$$

よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IH} \\ &= 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{IH} = 2(\vec{b} - 2\vec{a} + (-\vec{a})) + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} - 5\vec{a} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{CZ} = n(\vec{b} - 2\vec{a} + (-\vec{a})) + (\vec{a} - \vec{b}) = (n-1)\vec{b} + (1-3n)\vec{a}$$

第 4 問～第 6 問は、いずれか 1 問を選択し、解答しなさい。

第 6 問 (選択問題)

解答 (1) $1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^a \frac{1}{b} dx = \left[\frac{x}{b} \right]_0^a = \frac{a}{b}$, 故に, $b = a$

(2) $E(X) = \int_0^a x f(x) dx = \int_0^a \frac{x}{a} dx = \left[\frac{x^2}{2a} \right]_0^a = \frac{a}{2}$

(3) $m = E(X)$ として, $V(X) = \int_0^a (x - m)^2 f(x) dx$ より,

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^a (x - m)^2 f(x) dx = \int_0^a \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{a} dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - x + \frac{a}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3a} - \frac{x^2}{2} + \frac{ax}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} \end{aligned}$$

(4) $P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{n}\right) = \int_0^{\frac{a}{n}} f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{n}} \frac{1}{a} dx = \left[\frac{x}{a} \right]_0^{\frac{a}{n}} = \frac{1}{n}$

(5) $P\left(\frac{a}{n} \leq X \leq a\right) = 1 - P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$