一般選抜（前期日程）「数学」
（事業構想学群、食産業学群）

第１問 (必答問題)　次の問 **1**〜問 **5** に答えよ。

<u>解答</u>

問 **1** $2025 = 3^4 \times 5^2$

問 **2** $\dfrac{1}{\log_2 36} = \dfrac{1}{\dfrac{\log_{36} 36}{\log_{36} 2}} = \log_{36} 2$,　　$\dfrac{1}{\log_3 36} = \dfrac{1}{\dfrac{\log_{36} 36}{\log_{36} 3}} = \log_{36} 3$ より，

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36} = \log_{36} 2 + \log_{36} 3 = \log_{36} 6 = \log_{36} 36^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{36} 36 = \frac{1}{2}$$

問 **3** $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{2\pi}{3}$,　$\dfrac{4\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{5\pi}{3}$

問 **4** $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ より，

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 5^2 - 2\cdot(-1) = 27$$

問 **5** $A = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt \cdots ①$,　$B = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \cdots ②$ とおくと，　$f(x) = 3x^2 + Ax + B \cdots ③$

③ を ① と ② に代入すると，

$$A = \int_0^2 (3t^2 + At + B)\,dt = \left[t^3 + \frac{A}{2}t^2 + Bt\right]_0^2 = 8 + 2A + 2B \qquad \therefore\ A + 2B = -8$$
$$B = \int_0^1 (3t^2 + At + B)\,dt = \left[t^3 + \frac{A}{2}t^2 + Bt\right]_0^1 = 1 + \frac{A}{2} + B \qquad \therefore\ \frac{A}{2} = -1$$

故に，$A = -2$, $-2 + 2B = -8$，つまり $A = -2$, $B = -3$ であるので，③ へ代入して

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

第 2 問　(必答問題)

解答

(1) 平均値の定義と，z を与える関係式より

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{1}{n}(z_1+z_2+\cdots+z_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{x_1-\overline{x}}{s_x}+\frac{x_2-\overline{x}}{s_x}+\cdots+\frac{x_n-\overline{x}}{s_x}\right)\\ &= \frac{1}{ns_x}\left(x_1-\overline{x}+x_2-\overline{x}+\cdots+x_n-\overline{x}\right)\end{aligned}$$

ここで，分子は変量 x の偏差の総和であるが，一般に

$x_1-\overline{x}+x_2-\overline{x}+\cdots+x_n-\overline{x} = (x_1+x_2+\cdots+x_n)-n\overline{x} = (x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_n) = 0$

と常に零であるので，

$$\overline{z} = 0$$

(2) $\overline{z}=0$ より，z の偏差は $z_i-\overline{z}=z_i$ であるので，z の分散は

$$\begin{aligned}{s_z}^2 &= \frac{1}{n}((z_1-\overline{z})^2+(z_2-\overline{z})^2+\cdots+(z_n-\overline{z})^2) = \frac{1}{n}({z_1}^2+{z_2}^2+\cdots+{z_n}^2)\\ &= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{x_1-\overline{x}}{s_x}\right)^2+\left(\frac{x_2-\overline{x}}{s_x}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n-\overline{x}}{s_x}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{{s_x}^2}\cdot\frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right) = \frac{1}{{s_x}^2}\cdot{s_x}^2 = 1\end{aligned}$$

標準偏差は分散の非負の平方根であるから，

$$s_z = 1$$

(3) x と z の共分散 s_{xz} の定義式は，

$$s_{xz} = \frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})(z_1-\overline{z})+(x_2-\overline{x})(z_2-\overline{z})+\cdots+(x_n-\overline{x})(z_n-\overline{z})\right)$$

(4) x と z の共分散 s_{xz} に，$\overline{z}=0$ を考慮すると，$z_i-\overline{z}=z_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ であることから，

$$\begin{aligned}s_{xz} &= \frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})(z_1-\overline{z})+(x_2-\overline{x})(z_2-\overline{z})+\cdots+(x_n-\overline{x})(z_n-\overline{z})\right)\\ &= \frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})z_1+(x_2-\overline{x})z_2+\cdots+(x_n-\overline{x})z_n\right)\\ &= \frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})\frac{x_1-\overline{x}}{s_x}+(x_2-\overline{x})\frac{x_2-\overline{x}}{s_x}+\cdots+(x_n-\overline{x})\frac{x_n-\overline{x}}{s_x}\right)\\ &= \frac{1}{s_x}\cdot\frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right) = \frac{1}{s_x}\cdot{s_x}^2 = s_x\end{aligned}$$

を得る。これにより，x と z の相関係数の定義と (2) の結果のより，$r=\dfrac{s_{xz}}{s_x\cdot s_z}=\dfrac{s_x}{s_x\cdot 1}=1$ である。故に，

$$r = 1$$

第 3 問 (必答問題)

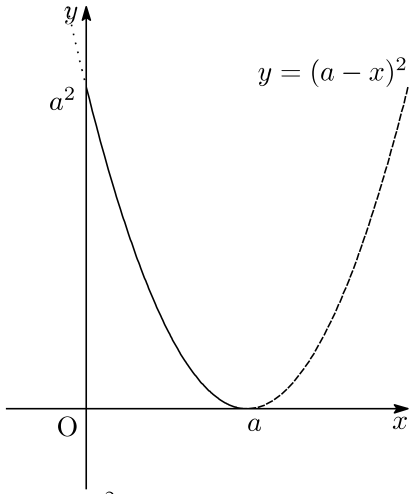
解答

(1) $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$，$f'(x) = 2x - 2a = 2(x-a)$ より，

$$f'(0) = 0 \iff x = a$$

よって，増減表とグラフは，

x	0	$\cdots$	a
$f'(x)$	$(-2a)$	$-$	0
$f(x)$	a^2	$\searrow$	0

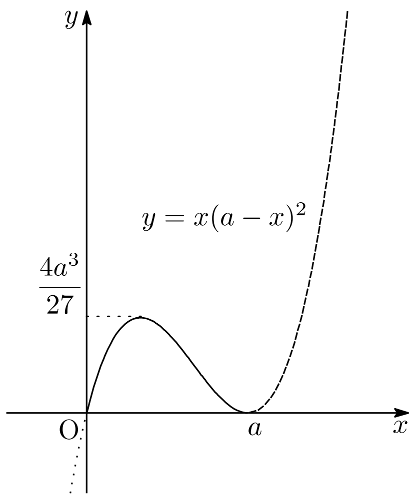


(2) $g(x) = x(a-x)^2 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$，$g'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$ より，

$$g'(x) = (3x-a)(x-a) = 0 \iff x = \frac{a}{3},\ a$$

よって，増減表とグラフは，

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$g'(x)$	(a^2)	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4a^3}{27}$	$\searrow$	0



(3) (2) より，最大値 $\dfrac{4a^3}{27}$ $\left(x = \dfrac{a}{3}\text{のとき}\right)$

第 **4** 問〜第 **6** 問から，**2** 問を選択し，解答しなさい。

第 4 問　(選択問題)

解答

(1) $2n-1$

(2) (1) より，$7=2n-1$ であるから，$n=4$

(3) $(2n-1)^2$

(4) (3) より，$(2n-1)^2 \geqq 10000$ となる最小の自然数 n を求めればよいので，

$$\begin{aligned} &2n-1 \geqq \sqrt{10000}=100 \\ &2n \geqq 101 \\ &n \geqq 50.5 \end{aligned}$$

故に，$n=51$ のとき，つまり G_{51} に初めて 10000 のタイルが含まれる。

(5) 自然数 k の 1 から $(2n-1)^2$ までの和であるので，

$$\sum_{k=1}^{(2n-1)^2} k = \frac{(2n-1)^2((2n-1)^2+1)}{2} = (2n-1)^2(2n^2-2n+1)$$

よって，求める値は

$$(2n^2-2n+1)(2n-1)^2$$

第 **4** 問〜第 **6** 問から，**2** 問を選択し，解答しなさい。

第 5 問　(選択問題)

解答

(1) $|\overrightarrow{c}|=1$，$|\overrightarrow{d}|=\dfrac{2}{3}$，$|\overrightarrow{e}|=\dfrac{1}{3}$ より

$$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=1\cdot\frac{2}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3},\quad \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{e}=1\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{6},\quad \overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{e}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{9}$$

(2)

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=|\overrightarrow{e}-\overrightarrow{d}|=\sqrt{|\overrightarrow{e}|^2-2\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{e}+|\overrightarrow{d}|^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=|t\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}|=\sqrt{|t\overrightarrow{c}|^2-2t\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}+|\overrightarrow{d}|^2}=\sqrt{t^2-2t\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{9t^2-6t+4}$$

したがって，$\mathrm{DE}=\mathrm{DP}$ となるのは，$9t^2-6t+4=3$ のときである。
これを解くと，$(3t-1)^2=0$ より，$t=\dfrac{1}{3}$ である。

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=(\overrightarrow{e}-\overrightarrow{d})\cdot(t\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})=t\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{e}-t\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}-\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{e}+|\overrightarrow{d}|^2\\&=\frac{1}{6}t-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であるから，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\dfrac{5}{18}$ である。したがって，

$$\cos\angle\mathrm{EDP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|\ |\overrightarrow{\mathrm{DP}}|}=\frac{\dfrac{5}{18}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{5}{6},\quad \therefore\ \sin\angle\mathrm{EDP}=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

故に，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot\mathrm{DP}\sin\angle\mathrm{EDP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{\sqrt{11}}{36}$$

第 **4** 問～第 **6** 問から，**2** 問を選択し，解答しなさい。

第 6 問　(選択問題)

解答

(1) X は二項分布 $B(100, 0.5)$ に従うので，その期待値と標準偏差は，

$$m = 100 \times 0.5 = 50, \qquad \sigma = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = 5$$

(2) $X = 46$ であるから，$Z = \dfrac{46 - 50}{5} = -0.8$ である。

(3) 正規分布表より $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.95$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leqq -1.96 \qquad \text{または} \qquad 1.96 \leqq Z$$

(4) (2) より，$Z = -0.8$ であり，この値は (3) で求めた棄却域に入らないから，仮説を棄却できない。すなわち，コインの表と裏の出やすさに偏りがあるとは判断できない。