一般選抜（前期日程）「数学」
（事業構想学群，食産業学群）

第 1 問　(必答問題)　次の問 **1**〜問 **5** に答えよ。

問 1 解答　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，$\cos^2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$ である。

θ が鋭角より，$\cos\theta > 0$ であるので，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。正接 $(\tan\theta)$ の定義より，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

問 2 解答　$\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \dfrac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3} = \dfrac{10+2\sqrt{21}}{4} = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$

問 3 解答　$\omega^2+\omega+1=0$ より，$\omega^2 = -\omega - 1$ である。これを用いて，
$\omega^3 = \omega\cdot\omega^2 = \omega(-\omega-1) = -\omega^2-\omega = 1$，つまり，$\omega^3 = 1 \cdots$①
$2024 = 3\times 674 + 2$ であるから，$\omega^{2024} = (\omega^3)^{674}\omega^2 = \omega^2$，したがって，$\omega^{2024} = \omega^2 \cdots$②
①，② を用いて，

$$\omega^{2024} + \omega = \omega^2 + \omega = -1$$

問 4 解答　$f(x) = x^2+2x+3$ とおくと，$f(x) = (x+1)^2+2$ である。
特に，この 2 次関数の軸は $x=-1$ である。
指定された定義域と，2 次関数の軸に関する対称性（または，グラフ）より，

最大値 6 ($x=1$ のとき)，　最小値 2 ($x=-1$ のとき)

問 5 解答　与式を a についてまとめる：$(13x+4y-1)a + (-3x-y+2) = 0 \cdots$①
題意により，① が a に関する恒等式となるので，次の連立方程式を解くと

$$\begin{cases} 13x+4y-1=0 \\ -3x-y+2=0 \end{cases}$$

求める定点は，

$$\mathrm{P}(-7, 23)$$

第 2 問　(必答問題)

<u>解答</u>　(1)　余弦定理より，

$$\mathrm{BC}^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 120^\circ = 61, \qquad \mathrm{BC} > 0 \text{ より}, \qquad \mathrm{BC} = \sqrt{61}$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin 120^\circ = 5\sqrt{3}$

(3)　正弦定理より三角形 ABC の外接円 D_1 の半径 R は，

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sqrt{61}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \qquad \text{外接円の半径 } R = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{183}}{3}$$

外接円 D_1 の面積 T は，

$$T = \pi R^2 = \frac{61}{3}\pi$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円 D_2 の半径 r は，

$$S = \frac{1}{2}r(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}), \qquad 5\sqrt{3} = \frac{1}{2}r(4 + 5 + \sqrt{61}), \qquad r = \frac{\sqrt{3}(9 - \sqrt{61})}{2}$$

$$\text{内接円の半径 } r = \frac{\sqrt{3}(9 - \sqrt{61})}{2} = \frac{9\sqrt{3} - \sqrt{183}}{2}$$

内接円 D_2 の面積 U は，

$$U = \pi r^2 = \frac{3(71 - 9\sqrt{61})}{2}\pi$$

よって，題意の領域の面積は

$$T - U = \frac{61}{3}\pi - \frac{3(71 - 9\sqrt{61})}{2}\pi = \frac{81\sqrt{61} - 517}{6}\pi = \left(\frac{27}{2}\sqrt{61} - \frac{517}{6}\right)\pi$$

第 3 問　(必答問題)

解答　題意から，$P(x)$ は，ある整式 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ を用いて次のように表せる。

$$P(x) = (x+1)^2 Q_1(x) + x + 2 \quad \cdots ①$$
$$P(x) = (x-1)^2 Q_2(x) + x + 4 \quad \cdots ②$$

このとき，

(1)　② より，$P(1) = 5 \quad \cdots ③$
　① より，$P(-1) = 1 \quad \cdots ④$

(2)　ある実数 a, b と整式 $Q_3(x)$ を用いて，$P(x) = (x+1)(x-1)Q_3(x) + ax + b$ とおける。
これに対して，(1) の解答の ③，④ より，

$$\begin{cases} P(1) = a + b = 5 \\ P(-1) = -a + b = 1 \end{cases}$$

これを解くと，$a = 2,\ b = 3$ である。よって，求める余りは

$$ax + b = 2x + 3$$

(3)　ある実数 r と整式 $Q_4(x)$ を用いて ② の整式 $Q_2(x)$ を，$Q_2(x) = (x+1)Q_4(x) + r$ とおくと，

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2\{(x+1)Q_4(x) + r\} + x + 4 \\ &= (x-1)^2(x+1)Q_4(x) + r(x-1)^2 + x + 4 \end{aligned}$$

(1) の解答の ④ より，

$$P(-1) = r(-1-1)^2 - 1 + 4 = 4r + 3 = 1$$

これより，$r = -\dfrac{1}{2}$ を得る。よって，求める余りは，

$$r(x-1)^2 + x + 4 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + x + 4 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{7}{2}$$

第 **4** 問～第 **6** 問は，いずれか **1** 問を選択し，解答しなさい。

第 4 問　(選択問題)

解答　(1)　さいころの目の出方は 8^2 通りである。このうち，出た目について，
差が 5 になる組合せは $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$, $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,3)$ の 6 通り，
差が 6 になる組合せは $(1,7)$, $(2,8)$, $(7,1)$, $(8,2)$ の 4 通り，
差が 7 になる組合せは $(1,8)$, $(8,1)$ の 2 通りである。よって，出た目の差が 5 以上である確率は

$$\frac{6+4+2}{8^2}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$$

(2)　求める事象の余事象，「3 回の目の積が奇数となる」事象を考える。

つまり「3 回すべてが奇数」となる場合であるから，その確率は $\left(\frac{4}{8}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。
よって，求める事象「3 回の目の積が偶数となる」確率は

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

(3)　さいころの目の出方は 8^3 通りある。A,B,C さんそれぞれの出した目を a,b,c とする。
$a>b>c$ となるのは 8 つの数字から 3 つの数字を選ぶ方法に 1 対 1 に対応するから ${}_8C_3$ 通りである。よって，求める確率は

$$\frac{{}_8C_3}{8^3}=\frac{56}{512}=\frac{7}{64}$$

(4)　2 つのさいころの目の出方は 8^2 通りである。D,E さんが出した目をそれぞれ d，e とする。
D さんがゲームに勝つのは $d\geqq e$ となる場合である。
$d>e$ となるのは 8 つの数字から 2 つの数字を選ぶ方法に 1 対 1 に対応するから ${}_8C_2$ 通り，
$d=e$ となるのは 8 通りであることから，D さんが 1 回のゲームで勝つ確率は

$$\frac{{}_8C_2+8}{8^2}=\frac{28+8}{64}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$$

である。D さんは最初の 1 回負けているので，
ここから D さんが優勝できるのは，3 連勝か，3 勝 1 敗の場合である。
3 連勝する確率は $\left(\frac{9}{16}\right)^3$ である。
3 勝 1 敗となる確率は 3 回目までで 2 勝 1 敗で 4 回目に勝つ場合であるから，

$${}_3C_2\left(\frac{9}{16}\right)^2\left(1-\frac{9}{16}\right)\cdot\left(\frac{9}{16}\right)=3\left(\frac{9}{16}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{16}\right)=\frac{9^3\cdot 21}{16^4}$$

である。よって，D さんが優勝できる確率は

$$\left(\frac{9}{16}\right)^3+\frac{9^3\cdot 21}{16^4}=\frac{9^3}{16^4}(16+21)=\frac{26973}{65536}$$

第4問〜第6問は，いずれか1問を選択し，解答しなさい。

第5問 (選択問題)

解答　CF と BE の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。一方，$\overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{a}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\vec{a}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ である。一方，$\overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} = -\vec{a} + \vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{QO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

(4)　$\mathrm{AF} : \mathrm{AD} = 1 : 2$ より，$\mathrm{FR} : \mathrm{DR} = 1 : 2$ である。$\overrightarrow{\mathrm{RD}} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \overrightarrow{\mathrm{RD}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{7}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

第 **4** 問〜第 **6** 問は，いずれか **1** 問を選択し，解答しなさい。

第 6 問　(選択問題)

解答　(1)　$\overline{x} = \frac{1}{9}(75 + 66 + 74 + 83 + 81 + 60 + 48 + 99 + 80) = \frac{666}{9} = 74$（点）

(2)　信頼度 95% の信頼区間は $\left[\overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ である。
$n = 9$，$\overline{x} = 74.0$，$\sigma = 7.8$ を代入すると，$1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times 2.6 = 5.096$ より，

$$\left[74.0 - 1.96 \times \frac{7.8}{\sqrt{9}},\ \ 74.0 + 1.96 \times \frac{7.8}{\sqrt{9}}\right]$$

であるから，この大学の今年の受験生の数学の得点に対する信頼度 95% の信頼区間は，

$$[68.9,\ \ 79.1]$$

(3)　題意と正規分布表から，
信頼度 99% の信頼区間 $\left[\overline{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ と表せる。
$n = 9$，$\overline{x} = 74.0$，$\sigma = 7.8$ を代入すると，$2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \times 2.6 = 6.708$ より，

$$\left[74.0 - 2.58 \times \frac{7.8}{\sqrt{9}},\ \ 74.0 + 2.58 \times \frac{7.8}{\sqrt{9}}\right]$$

であるから，この大学の今年の受験生の数学の得点に対する信頼度 99% の信頼区間は，

$$[67.3,\ \ 80.7]$$