

第 1 問（必答問題） 次の問 1～問 5 に答えよ。

問 1 解答 $M := 2^{2024}$ とする。

$$\log_{10} M = 2024 \cdot \log_{10} 2 = 2024 \cdot 0.3010 = 2024 \cdot 0.3010 = 609.224$$

$$\text{故に, } 609 < \log_{10} M < 610, \quad 10^{609} < M < 10^{610}$$

したがって、 2^{2024} は 610 桁の整数である。

問 2 解答 a, b が満たす条件は、 $a < 0$ かつ、 $ax^2 + x - b = 0 \cdots \textcircled{1}$ の解が $x = 1, 2$ となることである。このとき、 $\textcircled{1}$ の左辺は $a(x-1)(x-2) = ax^2 - 3ax + 2a$ となるから、係数を比較して $-3a = 1, 2a = -b$ 、よって $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ である。これは $a < 0$ を満たす。

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$

問 3 解答 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}, \quad \text{故に} \quad \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

したがって、

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{9}{4}$$

問 4 解答 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$ であるので、増減表を作成すれば、 $f(0) = 1$ と $f(2) = -3$ の範囲で題意を満たす。

$$-3 < k < 1$$

問 5 解答 $a = 0$ のとき、 $f(x) = 0$ となり、最大値 6 であることに反するので、 $a \neq 0$ である。

$f(x) = a(x-1)^2 - a$ より、軸は $x = 1$ である。 $f(x) = 0$ から、 x 軸との交点は、 $x = 0, 2$ 。

(i) $a > 0$ のとき、 $0 \leq x \leq 3$ において、 $x = 3$ のとき最大値 $f(3) = 3a = 6$ であるので、 $a = 2$ 、これは $a > 0$ を満たす。したがって、

$x = 1$ のとき、最小値 $f(1) = -a = -2$ である。

(ii) $a < 0$ のとき、 $0 \leq x \leq 3$ において、 $x = 1$ のとき最大値 $f(1) = -a = 6$ であるので、 $a = -6$ 、これは $a < 0$ を満たす。このとき、

$x = 3$ のとき、最小値 $f(3) = 3a = -18$ である。

以上より、

$a = 2$ のとき、最小値 -2 、 $a = -6$ のとき、最小値 -18 である。

第2問 (必答問題)

解答 $y = x^2$ かつ $y = -2x^2 + 4ax - 2a^2 + 1$ より,

$$3x^2 - 4ax + 2a^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

(1) ①の判別式 D として, $\frac{D}{4} = (-2a)^2 - 3(2a^2 - 1) = -2a^2 + 3$ を得る。条件 $D < 0$ より,

$$a < -\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \frac{\sqrt{6}}{2} < a$$

(2) 解が2つ存在する条件は(1)の判別式 D に対して, $D > 0$ であるから,

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(3) 連立方程式(*)の解が, 変数 y についてのただ一つの実数 γ であるとき, 解を $(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma)$ と表す。この2点は2次関数 $y = x^2$ のグラフ上の点であるから, $\gamma = \alpha^2 = \beta^2$ を得る。

また, 2次関数 $y = -2x^2 + 4ax - 2a^2 + 1$ のグラフ上の点でもあるので,

$$\gamma = -2\alpha^2 + 4a\alpha - 2a^2 + 1 = -2\beta^2 + 4a\beta - 2a^2 + 1$$

これより, $\alpha^2 = \beta^2$ も考慮して, $4a(\alpha - \beta) = 0$ を得る。故に, $a = 0$, または $\alpha = \beta$, 後者は x については重解となる場合である。2次方程式①の重解条件 $D = 0$ より, $-2a^2 + 3 = 0$ 。故に, x については重解となるときの a の条件は

$$a = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。以上より $a = 0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}$ のときについて考える。

- $a = 0$ のとき, 2次方程式①は $3x^2 - 1 = 0$ であるから,
 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, y = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ である。したがって,

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{または} \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

- $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき, ①は $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2 = 0$ である。故に, $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
これを $y = x^2$ へ代入して $y = \frac{2}{3}$ であるから,

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- $a = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき, ①は $3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2 = (\sqrt{3}x + \sqrt{2})^2 = 0$ である。故に, $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$
これを $y = x^2$ へ代入して $y = \frac{2}{3}$ であるから,

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

第3問 (必答問題)

解答 曲線 C_1 , C_2 の方程式をそれぞれ, $y = f(x) = 2x^2$, $y = g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする。
また, 共通接線を $y = h(x) = mx + n$ とする。

(1) $g(1) = 2$ であるから, $1 + a + b = 2$, 故に $b = 1 - a$ 。

また, $f'(x) = 4x$, $g'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ であり, $f'(1) = g'(1)$ より,

$4 = 3 + 2a + b$, 故に $2a + b = 1$ となり, $b = 1 - a$ と連立して

$$a = 0, \quad b = 1$$

点 $(1, 2)$ での接線は $f'(1) = 4$ より, 接線は $h(x) = 4(x - 1) + 2 = 4x - 2$, $h(x) = 4x - 2$ 。
よって,

$$m = 4, \quad n = -2$$

(2) $g(x) = x^3 + x$, $h(x) = 4x - 2$ より, $g(x)$ と $h(x)$ の交点は,

$$x^3 + x = 4x - 2, \quad x^3 - 3x + 2 = 0$$

この 3 次方程式は, $x = 1$ のときに成り立つので, $(x - 1)$ は因数である。 $x^3 - 3x + 2$ を $x - 1$ で割ると, $x^2 + x - 2$ となり, さらに因数分解して, $(x - 1)(x + 2)$ を得る。よって, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0$ となり, 交点は $1, -2$ である。求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 ((x^3 + x) - (4x - 2)) \, dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) \, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

(3) 曲線 $C_1 : y = f(x) = 2x^2$ と $C_2 : y = g(x) = x^3 + x$ の交点の x 座標は $x = 0, 1$ である。
求める面積を T とすると, (2) で求めた S を用いて

$$T = S - \int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx$$

である。ここで,

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

故に,

$$T = S - \frac{1}{12} = \frac{27}{4} - \frac{1}{12} = \frac{81 - 1}{12} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3}$$

第4問～第6問は、いずれか1問を選択し、解答しなさい。

第4問 (選択問題)

解答 (1) すべてのカードの枚数は16枚、Aは4枚存在する。よってAを順番に連続してめくる確率は

$$\frac{4}{16} \times \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{1820}$$

(2) $n=1, n=2, n=3$ に対して、確率は0である。

$n=4$ の場合、A, J, Q, K いずれかの4種の絵柄が表になるため、(1)より

$$4 \times \frac{1}{1820} = \frac{1}{455}$$

$n=5$ の場合、A, J, Q, K のいずれかが、4回目までに3枚めくられ、5回目に4枚目がめくられる場合の数は、

$$4 \times {}_4C_3 \times {}_{12}C_1 \times 4! \times 1 = 2^9 \cdot 3^2$$

めくり方の総数は

$${}_{16}P_5 = 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

故に、求める確率は

$$\frac{2^9 \times 3^2}{2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{4}{455}$$

(3) A, J, Q, K のいずれか (X とする) が、6回目までに3枚めくられる組合せは、

$${}_4C_3 \times {}_{12}C_3 = 2^4 \times 5 \times 11$$

であり、題意を満たす場合の数は

$$2^4 \times 5 \times 11 \times 4 \times 6! \times 1 = 2^{10} \times 3^2 \times 5^2 \times 11$$

である。7回めくる場合の数は、

$${}_{16}P_7 = 2^8 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$$

したがって求める確率は

$$\frac{2^{10} \times 3^2 \times 5^2 \times 11}{2^8 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13} = \frac{4}{91}$$

第4問～第6問は、いずれか1問を選択し、解答しなさい。

第5問 (選択問題)

解答 (1) 両辺に $(2n+1)(2n+3)$ かけると

$$1 = \frac{1}{c} ((2n+3) - (2n+1)) = \frac{2}{c} \quad \therefore c = 2$$

(2)(i) $n \geq 2$ のとき, $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - ((n-1)^2 + (n-1)) = 2n \quad \dots \textcircled{1}$

$S_1 = a_1 = 2$ であり, ① で $n = 1$ とすると $a_1 = 2$ であるから, ① は $n = 1$ のときも成り立つ。
よって

$$a_n = 2n$$

(ii) $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k)(2(k+1))} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right)$ であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

(3)(i) $n \geq 2$ のとき, $b_n = T_n - T_{n-1} = (n^2 + n + 2) - ((n-1)^2 + (n-1) + 2) = 2n \quad \dots \textcircled{2}$

$T_1 = b_1 = 4$ であるので,

$$b_n = \begin{cases} 2n & (n \geq 2) \\ 4 & (n = 1) \end{cases}$$

(ii) $n \geq 2$ のとき, (2) の (ii) と同様に, $\frac{1}{b_k b_{k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right)$ であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k b_{k+1}} &= \frac{1}{b_1 b_2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{b_k b_{k+1}} = \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(1 + \frac{2(n-1)}{n+1} \right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{n+1+2n-2}{n+1} = \frac{3n-1}{16(n+1)} \end{aligned}$$

$b_1 = 4, b_2 = 4$ であるから, 上の結果は $n = 1$ のときも, $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{b_k b_{k+1}} = \frac{1}{b_1 b_2} = \frac{1}{16}$ と成立して

いる。以上より, 任意の自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k b_{k+1}} = \frac{3n-1}{16(n+1)}$ である。

第 4 問～第 6 問は、いずれか 1 問を選択し、解答しなさい。

第 6 問 (選択問題)

解答 (1) $\bar{x} = \frac{1 \times 1600 + 0 \times 900}{2500} = \frac{40^2}{50^2} = \frac{20^2}{25^2} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} = 0.64$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{1^2 \times 1600}{2500} - \left(\frac{1600}{2500}\right)^2} = \sqrt{\frac{(2500 - 1600) \cdot 1600}{2500^2}} \\ &= \sqrt{\frac{900 \cdot 1600}{2500^2}} = \frac{\sqrt{(30 \cdot 40)^2}}{2500} = \frac{30 \cdot 40}{50^2} = \frac{12}{25} = 0.48 \end{aligned}$$

(2) 母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は、 $\left[\bar{x} - 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$ で、
 $n = 2500$, $\bar{x} = 0.64$, $s = 0.48$ を代入すると、

$$1.96 \times \frac{0.48}{\sqrt{2500}} = 1.96 \times \frac{0.48}{50} = 1.96 \times 0.0096 = 0.018816$$

より、求める信頼区間は

$$[0.621, 0.659]$$

(3) 題意と正規分布表から、母比率 p に対する信頼度 99% の信頼区間は、以下のようになる。

$$\left[\bar{x} - 2.58 \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.58 \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$n = 2500$, $\bar{x} = 0.64$, $s = 0.48$ を代入すると、

$$2.58 \times \frac{0.48}{\sqrt{2500}} = 2.58 \times \frac{0.48}{50} = 2.58 \times 0.0096 = 0.024768$$

より、求める信頼区間は

$$[0.615, 0.665]$$