一般選抜（後期日程）「数学」
（事業構想学群、食産業学群）

第１問 (必答問題)　以下の問 1〜問 5 に答えよ。

問 1　解答　与式を k についてまとめ，k の多項式としての係数比較すると

$$(x-y-2z-6)k^2+(x-2y-3z+2)k-x+3y+2z+2=0$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y-2z-6=0 & \cdots① \\ x-2y-3z+2=0 & \cdots② \\ -x+3y+2z+2=0 & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③ より，　$x=\mathbf{20}$，　$y=\mathbf{2}$，　$z=\mathbf{6}$

問 2　解答　$\beta=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}$ である。これと，求める l,m,n との関係より

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}=\frac{m+n\sqrt{2}}{2+l\sqrt{3}}$$

であるので，両辺の分母を払うと

$$(2+\sqrt{3})(2+l\sqrt{3})=(3-2\sqrt{2})(m+n\sqrt{2})$$

これをまとめると，　$(3l-3m+4n+4)+(2m-3n)\sqrt{2}+(2l+2)\sqrt{3}=0$

l，m，n が有理数であるので，題で使用が認められた性質を用いて，

$$3l-3m+4n+4=0,\quad 2m-3n=0,\quad 2l+2=0$$

これを解くと，　$l=-\mathbf{1}$，　$m=\mathbf{3}$，　$n=\mathbf{2}$

問 3　解答　条件を満たすのは，$\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ のときであるので，a の範囲から，
$a=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ である。このときの値はそれぞれ，

$$a=\frac{\pi}{4}\text{のとき}\qquad \frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$
$$a=\frac{5\pi}{4}\text{のとき}\qquad \frac{5\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\pi\sqrt{2}}{8}$$

問 4　解答　与えられた放物線と x 軸との交点は $x=0, a$ であり，この範囲で放物線は x 軸の下に位置することに注意する。特に $a \fallingdotseq 0$ としてよい。

(i) $a>0$ のとき，

$$\frac{9}{2}=\int_0^a (-(x^2-ax))\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)=\frac{a^3}{6}\qquad\therefore\quad a=3$$

(ii) $a<0$ のとき，

$$\frac{9}{2}=\int_a^0 (-(x^2-ax))\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}\right]_a^0=-\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)=-\frac{a^3}{6}\qquad\therefore\quad a=-3$$

以上より，求める条件は，　$a=\mathbf{3},\ -\mathbf{3}$ である。

問 5　解答　$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{12}=\dfrac{z+x}{13}=k$ とすると，

$$\begin{aligned}x+y&=5k \quad \cdots ①\\ y+z&=12k \quad \cdots ②\\ z+x&=13k \quad \cdots ③\end{aligned}$$

①+②+③ : $2(x+y+z)=30k$　の両辺を 2 で割り

$$x+y+z=15k \quad \cdots ④$$

④ に対して，②，③，① を用いると，それぞれ

$$x=3k,\quad y=2k,\quad z=10k \quad \cdots ⑤$$

⑤ より，

$$xyz=60k^3 \quad \cdots ⑥$$

⑥ と $xyz=480$ より，$k=2$ であるので，④ より，

$$x+y+z=15\times 2=\mathbf{30}$$

第 **2** 問〜第 **4** 問から，**2** つを選択し，解答しなさい。

第 2 問　(選択問題)

解答　(1)　S_n は定義から，初項 1，公比 r の等比数列の第 1 項から第 n 項までの和であるから，

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(2)　$T_n - rT_n$ を計算すると，

$$\begin{array}{rrl} & T_n = & 1 + 2r + 3r^2 + \cdots\cdots\cdots + nr^{n-1} \\ -) & rT_n = & \quad r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \\ \hline & T_n - rT_n = & 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \\ & = & S_n - nr^n \end{array}$$

故に，

$$T_n - rT_n = S_n - nr^n$$

(3)　(2) より，$(1-r)T_n = S_n - nr^n$ であるから，

$$T_n = \frac{S_n}{1-r} - \frac{nr^n}{1-r} = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r} = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

(4)　(2) と同様に，$U_n - rU_n$ を計算すると，

$$\begin{array}{rrl} & U_n = & 1 + 2^2r + 3^2r^2 + \cdots + (n-1)^2r^{n-2} + n^2r^{n-1} \\ -) & rU_n = & \quad r + 2^2r^2 + \cdots + (n-2)^2r^{n-2} + (n-1)^2r^{n-1} + n^2r^n \\ \hline & (1-r)U_n = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)r^{k-1} - n^2r^n \\ & (右辺) = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)r^{k-1} - n^2r^n = 2T_n - S_n - n^2r^n \end{array}$$

が得られ，したがって

$$U_n = \frac{2T_n - S_n - n^2r^n}{1-r}$$

第 **2** 問〜第 **4** 問から，**2** つを選択し，解答しなさい。

第 3 問 (選択問題)

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})$ である。ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AF}})=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+l\overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

と，定数 k,l を用いて 2 通りに表せる。$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ であるので，(1) の結果も用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right)=\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+l(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})=2l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(l+1)\overrightarrow{\mathrm{AF}}\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{cases}\dfrac{k}{2}=2l\\ \dfrac{3k}{2}=l+1\end{cases}\qquad \text{これを解いて，}\qquad \begin{cases}k=\dfrac{4}{5}\\ l=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

以上より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AF}}|\cos\dfrac{2\pi}{3}=-50$ であるから，(1) と (2) の結果より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{5}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\cdot\frac{-8}{5}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2\\ &=-80+115+30=65\end{aligned}$$

第 **2** 問〜第 **4** 問から，**2** つを選択し，解答しなさい。

第 4 問　(選択問題)

解答　確率変数 X は，1,2 の目が出る事象の確率 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ と，100 回の反復試行とする二項分布に従うことに注意する。

(1) 確率 $P(X=n)$ は，

$$P(X=n)={}_{100}C_n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100-n}=\frac{100!}{n!(100-n)!}\cdot\frac{2^{100-n}}{3^{100}}$$

(2) $n=0,1,\cdots,99$ に対して，

$$\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}=\frac{\dfrac{100!}{(n+1)!(99-n)!}\cdot\dfrac{2^{99-n}}{3^{100}}}{\dfrac{100!}{n!(100-n)!}\cdot\dfrac{2^{100-n}}{3^{100}}}=\frac{(100-n)!}{(99-n)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2}$$

故に，

$$\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}=\frac{100-n}{2n+2}$$

(3)

$$\frac{P(X=n+1)-P(X=n)}{P(X=n)}=\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}-1=\frac{100-n}{2n+2}-1=\frac{98-3n}{2n+2}$$

(4) (3) より，

(i) $0\leqq n\leqq 32$ のとき，$98-3n>0$ であるので，$P(X=n+1)>P(X=n)$

(ii) $33\leqq n\leqq 99$ のとき，$98-3n<0$ であるので，$P(X=n+1)<P(X=n)$

したがって，

$$P(X=0)<P(X=1)<\cdots<P(X=32)<P(X=33)$$
$$P(X=33)>P(X=34)>\cdots>P(X=100)$$

以上より，求める n の値は，33 である。