一般選抜（前期日程）「数学」
（事業構想学群、食産業学群）

第１問　(必答問題)　以下の問 1～問 5 に答えよ。

解答

問 1　$x(x-1)(x-2) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq 0$ かつ —$x \neq 1$

問 2　$(a,b,c)=(3,7,5)$ のときで考えてよい。B が最大の内角であり，余弦定理より

$$\cos B = \frac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

よって，$\angle \mathrm{B} = \dfrac{2\pi}{3}$ である。

問 3　与式の両辺で底が 2 の対数をとると：

$$\begin{aligned}
&\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 64x \\
&(\log_2 x)(\log_2 x) = \log_2 64 + (\log_2 x) \\
&(\log_2 x)(\log_2 x) = 6 + (\log_2 x) \\
&(\log_2 x)^2 - (\log_2 x) - 6 = 0 \\
&(\log_2 x - 3)(\log_2 x + 2) = 0 \\
&\log_2 x = 3, -2 \\
\therefore \quad & x = 8,\ \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

問 4　条件より，すべての x について $f'(x) = 3kx^2 + 6x + k \geqq 0 \cdots$ ① である。$k \leqq 0$ のときはこれを満たさないため，$k > 0$ である。このとき，① をみたすのは，2 次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式が $D \leqq 0$ を満たすときである。

$$D = 6^2 - 4\cdot 3k\cdot k \leqq 0, \qquad \therefore \quad k \leqq -\sqrt{3},\ k \geqq \sqrt{3}$$

$k > 0$ であるから，求める条件は，$k \geqq \sqrt{3}$ である。

問 5　40 本のくじをすべて引いているので，くじ A の本数を x，くじ B の本数を $20-x$ とすると，参加者全員の獲得ポイントの合計が 58 点より，

$$4x + 2(20-x) = 58, \qquad \therefore \quad x = 9$$

したがって，

当たりくじ A は　9 本
当たりくじ B は　11 本

第 **2** 問〜第 **4** 問から，**2** つを選択し，解答しなさい。

第 2 問 (選択問題)

解答

(1) $a_1 = 2,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = 7$

(2) n 本の直線により平面が a_n 個の部分に分かれているとき，$(n+1)$ 本目の直線 l を引くと，条件より，l は n 本の直線と別々に 1 回ずつ交わるので n 個の交点を持つ。この l 上の n 個の交点は l を $(n-1)$ 個の線分と，2 個の半直線に分ける。この $(n-1)$ 個の線分または半直線は，元からあった別々の $(n+1)$ 個の部分を 2 つに分ける。
したがって，新たに $(n+1)$ 個の部分が出来るため，求める関係式は

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)$$

(3) (2) より，数列 $\{a_n\}$ は，階差数列の一般項が $n+1$ であることから，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 2 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n+1) = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

であり，$n=1$ のとき，$a_1 = 2$ であるので，この式は $n=1$ のときも成り立つ。
したがって，求める一般項は

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

(4) $b_1 = 0,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 1$

(5) (2) の解答で述べたように，$(n+1)$ 本目の直線 l は，$(n-1)$ 個の線分と，2 個の半直線に分けられる。この $(n-1)$ 本の線分が，線分で囲まれた部分内にあるか否かで場合分けすると，

- 線分で囲まれた多角形内にある線分は，その多角形を 2 つの多角形に分ける，
- 線分で囲まれていない部分にある線分は，その部分を 1 つの多角形と，1 つの線分で囲まれていない部分に分ける。

また，2 本の半直線が新たに作る部分は，線分で囲まれない部分となる。
したがって，新たに $(n-1)$ 個の線分で囲まれた多角形が出来るため，求める関係式は

$$b_{n+1} = b_n + (n-1)$$

(6) $n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k-1) = 0 + \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) = \frac{1}{2}(n^2-3n+2)$$

であり，$n=1$ のとき，$b_1 = 0$ であるので，この式は $n=1$ のときも成り立つ。
したがって，求める一般項は

$$b_n = \frac{1}{2}(n^2-3n+2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

第 **2** 問〜第 **4** 問から，**2** つを選択し，解答しなさい。

第 3 問　(選択問題)

解答

(1) $\vec{p_1} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$，$\vec{p_2} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$

(2) $\vec{p} = (1-t)\vec{p_1} + t\vec{p_2}$ であるから，(1) より

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (1-t)\left((1-t)\vec{a} + t\vec{b}\right) + t\left((1-t)\vec{b} + t\vec{c}\right)\\ &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}\end{aligned}$$

(3) $\vec{a} = (0,0)$，$\vec{b} = (1,0)$，$\vec{c} = (2,4)$ であるから，

$$\vec{p} = (2t(1-t), 0) + (2t^2, 4t^2) = (2t, 4t^2)$$

(i) $\vec{p} = (x, y)$ であるので，

$$x = 2t, \qquad y = 4t^2$$

(ii) (i) の式から t を消去すると，$y = x^2$ であるので

$$f(x) = x^2$$

(4) (3) と同様に，$\vec{a} = (0,-2)$，$\vec{b} = (1,1)$，$\vec{c} = (2,0)$ であるから，

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (1-t)^2(0,-2) + 2t(1-t)(1,1) + t^2(2,0)\\ &= (2t(1-t) + 2t^2, -2(1-t)^2 + 2t(1-t))\\ &= (2t, -4t^2 + 6t - 2)\end{aligned}$$

$\vec{p} = (x, y)$ として，

$$x = 2t, \qquad y = -4t^2 + 6t - 2$$

この式から t を消去すると，$y = -x^2 + 3x - 2$ であるので

$$g(x) = -x^2 + 3x - 2$$

第 **2** 問〜第 **4** 問から，**2** つを選択し，解答しなさい。

第 4 問　(選択問題)

解答　$f(x)$ の不定積分 $F(x)$ は，次のようになることに注意する：

$$F(x) = \frac{1}{36}\left(cx - \frac{x^3}{3}\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(1) 確率密度関数は，$f(x) \geqq 0$，$\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 1$ を満たすので

$$1 = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{36}\left[cx - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{36}\left\{(3c-9) - (-3c+9)\right\} = \frac{1}{36}\cdot(6c-18)$$

よって，

$$c = 9$$

このとき，$f(x) \geqq 0$ も満たす。特に，$F(x) = \dfrac{1}{36}\left(9x - \dfrac{x^3}{3}\right) + C$ である。

(2) X のとる値の範囲より，$0 \leqq X \leqq 3$ となる事象の確率であるから，

$$P(0 \leqq X) = P(0 \leqq X \leqq 3) = \frac{1}{36}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3} = \frac{1}{36}\left(9\cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

(3) X のとる値の範囲より，$1 \leqq X \leqq 2$ となる事象の確率であるから，

$$P(1 \leqq X \leqq 2) = \frac{1}{36}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{36}\left\{(9\cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - (9 - \frac{1}{3})\right\}$$
$$= \frac{1}{36}\left(9 - \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{36}\cdot\frac{20}{3} = \frac{5}{27}$$

(4) 定義より，

$$E(X) = \int_{-3}^{3} x\cdot\frac{1}{36}(9-x^2)\,dx = \frac{1}{36}\int_{-3}^{3}(9x - x^3)\,dx = \frac{1}{36}\left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{3} = 0$$

(5) (4) より $m = 0$ であり，定義より，

$$V(X) = \int_{-3}^{3}(x-m)^2\cdot\frac{1}{36}(9-x^2)\,dx = \frac{1}{36}\int_{-3}^{3}(9x^2 - x^4)\,dx$$
$$= \frac{1}{36}\left[3x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{36}\left\{(3\cdot 27 - \frac{243}{5}) - (3\cdot(-27) + \frac{243}{5})\right\}$$
$$= \frac{1}{18}\left(81 - \frac{243}{5}\right) = \frac{1}{18}\left(\frac{405}{5} - \frac{243}{5}\right) = \frac{1}{18}\cdot\frac{162}{5} = \frac{9}{5}$$